Name: **2. MATHEMATIKKLAUSUR** 28.11.2002

Mathe 12 GK (GA) Bearbeitungszeit: 135 min

Aufgabe 1: Geben Sie zu folgenden Funktionen jeweils die erste und zweite Ableitung an. Fassen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich zusammen.

a) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ **b)** $f(x) = x \cdot (\sin(x) + \cos(x))$

Aufgabe 2: **a)** Zeigen Sie mit Hilfe der Produktregel: $(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Regel die erste Ableitung von

$f(x) = (2x^2 - 5x + 7) \cdot \sin(x) \cdot \sqrt{x}$

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion *f*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. mit $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x}$.

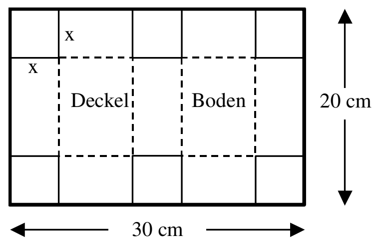
a) Bestimmen Sie die erste Ableitung von *f*.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte N_1 und N_2 des Graphen von *f* mit der x-Achse.

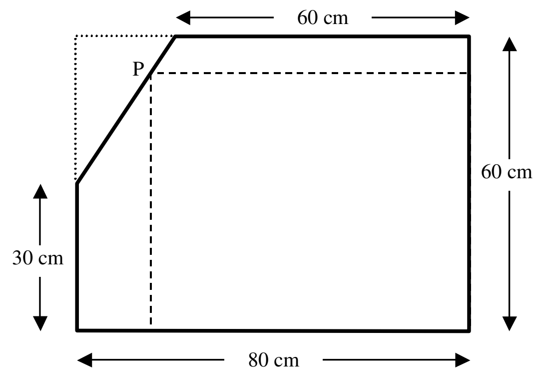
c) Welche Steigung haben die Tangenten an den Graphen in den Punkten N_1 und N_2?

d) In welchem Punkt hat der Graph von *f* eine waagerechte Tangente?

Aufgabe 4: Aus einem $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ großen Karton soll durch Herausschneiden von 6 Quadraten eine Schachtel hergestellt werden, deren Deckel auf drei Seiten übergreift (siehe rechte Abb.). Wie groß sind die Quadrate zu wählen, damit das Volumen möglichst groß wird? Geben Sie auch das maximale Volumen an.



Aufgabe 5: Der arme Günter Ungeschickt! Schon wieder ist ihm eine Glasscheibe zerbrochen, allerdings ist ihm diesmal nur ein kleines dreieckiges Stück abgebrochen. Natürlich will sein Chef auch diesmal eine möglichst große rechteckige Glasscheibe aus dem Reststück geschnitten haben. Wie groß sind die Ausmaße zu wählen?



Hinweis: 1. Legen Sie um die Glasscheibe ein geeignetes Koordinatensystem;
2. Geben Sie für die Bruchstelle eine Funktionsgleichung an;
3. Der Punkt P liegt auf der Bruchstelle und gibt Ihnen eine geeignete Nebenbedingung für das Problem.

Aufgabe 6: Sei f_k: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. mit $f_k(x) = x^2 + kx - k$, $k \in \mathbb{R}$. eine Funktionsschar.

a) Skizzieren Sie die Graphen von f_0, f_1 und f_{-2} in ein Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f_k mit der x-Achse. Für welche Werte von *k* sind 2 (1; bzw. 0) Schnittpunkte vorhanden?

c) Ermitteln Sie die Koordinaten des Tiefpunktes von f_k.

d) Geben Sie die Gleichung der Kurve an, auf der alle Tiefpunkte der Kurvenschar liegen. Zeichnen Sie diese in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a) ein.

e) Zeigen Sie, dass alle Kurven von f_k durch den Punkt S(1 | 1) verlaufen.

f) Für welchen Wert *k* liegt der Tiefpunkt am höchsten?

Viel Erfolg!!!

LÖSUNGEN

Aufgabe 1:

a) $f'(x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$; $f''(x) = -4\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

b) $f'(x) = (x + 1)\cdot\cos(x) + (1 - x)\cdot\sin(x)$; $f''(x) = (2 - x)\cdot\cos(x) - (x + 2)\cdot\sin(x)$

Aufgabe 2:

a) $(f\cdot g\cdot h)' = (f\cdot g)'\cdot h + (f\cdot g)\cdot h' = (f'\cdot g + f\cdot g')\cdot h + (f\cdot g)\cdot h' = f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'$

b) $f'(x) = (4x-5)\cdot\sin(x)\cdot\sqrt{x} + (2x^2-5x+7)\cdot\cos(x)\cdot\sqrt{x} + (2x^2-5x+7)\cdot\sin(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 3:

a) $f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ **b)** $f(x)=0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 1$.

c) $f'(0) = -{}^1/_0 \Rightarrow$ nicht lösbar. Allerdings erkennt man für kleine x-Werte, dass die Steigung gegen unendlich verläuft.
$f'(1) = {}^2/_2 = 1$.

d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0$ $x = {}^1/_3$.

Aufgabe 4:

$V(x) = x\cdot(20 - 2x)\cdot(30 - 3x)/2 = 3x^3 - 60x^2 + 300x$ $V'(x) = 9x^2 - 120x + 300$
notw. Bed.: $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ oder $x = {}^{10}/_3$.
hinr. Bed. liefert für $x = 10$ einen Tiefpunkt und für $x = {}^{10}/_3$ einen Hochpunkt.
$V({}^{10}/_3) = {}^{4000}/_9$.
Randwerte: $x = 0 \Rightarrow V(0) = 0$ und $x = 10$ wurde bereits getestet

Aufgabe 5:

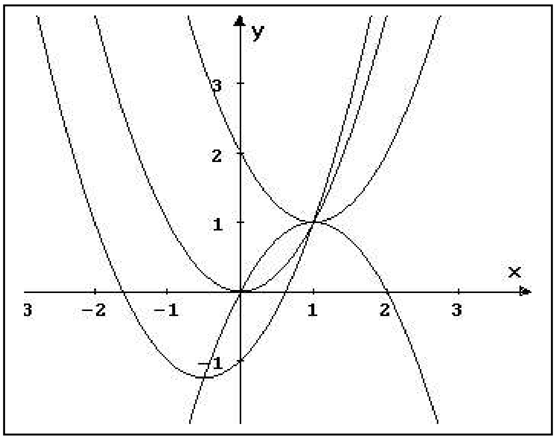
Die Bruchstelle hat Gradengleichung $g(x) = {}^3/_2x + 30$. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist $A = b\cdot h$.
Sei der Punkt $P(x \mid y)$ auf der Geraden g gelegen. Dann gilt für die Breite $b = 80 - x$ und $h = g(x)$.

Damit ergibt sich $A(x)= (80 - x)\cdot g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 90x + 2400$

notw. Bed. ist $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 90 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 30$.
Der Definitionsbereich ist allerdings aufgrund der kleinen Bruchstelle $D = \{x \mid 0 \le x \le 20\}$.
Also kommen nur die Randwerte in Betracht: für $x = 0$: $A(0) = 2400$ und für $x = 20$: $A(20) = 3600$
Damit erhält man die größte rechteckige Glasscheibe, wenn man sie 60 cm × 60 cm groß wählt.

Aufgabe 6:

a) Die Graphen verlaufen wie rechts abgebildet. Die Kurve der Tiefpunkte ist bereits eingezeichnet.



b) $x^2 + kx - k = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2+4k}{4}}$

eine Nullstelle $\Leftrightarrow \frac{k^2+4k}{4} = 0 \Leftrightarrow k(k+4) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -4$

keine Nullstelle $\Leftrightarrow \frac{k^2+4k}{4} < 0 \Leftrightarrow k(k+4) < 0 \Leftrightarrow -4 < k < 0$

zwei Nullstellen $\Leftrightarrow \frac{k^2+4k}{4} > 0 \Leftrightarrow k(k+4) > 0 \Leftrightarrow k < -4 \vee k > 0$

c) notw. Bed. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + k = 0 \Leftrightarrow x = -{}^k/_2$.
hinr. Bed.: $f''(x) \neq 0$: $f''(x) = 2 > 0$ für alle $x \Rightarrow$
$TP(-{}^k/_2 \mid -{}^1/_4\cdot k^2 - k)$.

d) $TP(-{}^k/_2 \mid -{}^1/_4\cdot k^2 - k) \Rightarrow x = -{}^k/_2 \Rightarrow k = -2x$.
$y = -{}^1/_4\cdot k^2 - k = -{}^1/_4\cdot(-2x)^2 - (-2x) = -x^2 + 2x$

e) $f_k(1) \Leftrightarrow 1 + k - k = 1 \Rightarrow S(1 \mid 1)$ liegt auf f_k für alle k.

f) Frage: Wann ist $-{}^1/_4\cdot k^2 - k$ maximal? Zielfunktion: $h(k) = -{}^1/_4\cdot k^2 - k$
notw. Bed.: $h'(k) = -{}^1/_2\cdot k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = -2$.
hinr. Bed.: $h''(k) \neq 0$: $h''(k) = -{}^1/_2 < 0$ für alle $k \Rightarrow$ für $k = -2$ liegt der Tiefpunkt
$TP(1 \mid 1)$ am höchsten.
Anderer Ansatz:
$y = -x^2 + 2x = -(x^2 - 2x) = -(x^2 - 2x + 1 - 1) = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x-1)^2 + 1$
$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S(1 \mid 1)$
Der höchste Punkt dieser Kurve wird im Scheitelpunkt angenommen, also bei $S(1 \mid 1)$.
Frage: für welches k liegt der Tiefpunkt bei $S(1 \mid 1)$ bzw. für welches k gilt $f'_k(1)=0$?
$f'_k(1) = 0 \Leftrightarrow 2 + k = 0 \Leftrightarrow k = -2$.